數學傳播 41卷1期, pp. 61-79

微積分之前奏 (或變奏): 高階等差數列的求和

林開亮*

另一件印象比較深刻的事, 是上初中時, 我對中國古代數學萌發了一些興趣。記得那時我們在念代數, 教科書是《範氏大代數》[1]。那時一直困惑我的一個問題是: 爲什麼我們的數學教科書上沒有一個來自中國文明的定理和成就?

程貞一, 見 [6]

最早的幾何學、最早的方程組、最古老的矩陣等等, 翻開歷史, 中國曾經是一個數學的國度, 中國數學在世界上的位置遠比今天靠前。祖沖之、劉徽、《九章算術》、《周髀算經》、《四元玉鑒》 等一批大家和著作, 使中國數學曾經處於世界巔峰。正是由於這些輝煌, 中國數學不僅要振興, 更要復興!

吳文俊, 見 [12]

1. 引言

在筆者從事兩年微積分教學以後, 突然發現, 有一個內容其實特別適合大一新生乃至即將升入大學的高中生, 這就是高階等差數列的求和。它本質上可以視爲一種「有限 (或離散)」的微積分, 因而可以說是 (無限) 微積分的前奏或變奏。在許多資深的大學教師看來, 這自然是小兒科, 但對從未接觸微積分或者是學完微積分仍然摸不著頭腦的學生而言, 也許是非常吸引人的。筆者認爲, 可以考慮將這部分內容吸收到中學數學教材 (作爲微積分的前奏) 或者大學數學教材 (作爲微積分的變奏)。

不過通常教材都比較枯燥, 我們這裡打算以講故事的形式展開。首先要指出, 所講的故事都是有據可查的歷史, 而且你會驚喜地發現, 原來中國古代數學家 (以元代的朱世傑爲代表) 對

*本文基於作者參加《知識就是力量》雜誌社主辦 2016 年度「全國中學生數學/物理/化學科普競賽」數學科普講座的講稿《從楊輝三角到李善蘭垛積術》, 曾在石家莊、鄭州、西安、青島、濟南五城市爲參賽的中學生做報告。

[1]Henry Burchard Fine, *A College Algebra*, Ginn & Co., 1901. 這本書有多個中譯本, 一度作爲中學數學教材。

「有限」微積分作出了如此重大的貢獻! 如果中學時代的程貞一有機會聽到這個故事, 他一定會很激動的。

2. 從高斯的故事講起: 前 n 個正整數的求和

談及等差數列的求和, 也許想到的第一個例子就是高斯(Gauss) 著名的求和

$$1+2+3+\cdots+100=?$$

的故事。流行的說法是, 聰明的高斯用倒序相加的辦法得出了和數, 但事實上後人根據高斯逝世後發現的《數學日記》[2]分析, 他所採取的辦法其實是數學歸納法。也就是說, 高斯先算出的是

$$\begin{aligned} 1&=1,\\ 1+2&=3,\\ 1+2+3&=6,\\ 1+2+3+4&=10,\\ &\cdots \end{aligned}$$

並從中發現了一般的規律

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

回到原來的問題, 只需在上式中令 $n=100$。也許你要說, 高斯的辦法不如倒序相加來得快, 可是要知道, 數學歸納法是極有威力的一般方法 (而倒序相加則是充分利用了求和式中首尾對稱的特點)。

可以想見, (1) 很早就被人得到了, 例如它出現在 1 世紀出版的中國古典數學名著《九章算術》中, 見第三章衰分和第六章均輸。

3. 回到阿基米德: 前 n 個正整數的平方的求和

如果我們考慮的不是前 n 個正整數的求和, 而是前 n 個正整數的平方的求和:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=?$$

那麼歷史就把我們帶回到古希臘最偉大的數學家阿基米德 (Archimedes) 了, 他是 (有記錄的) 第一個求出這個和的人。他的結果記錄在《論螺線》命題 10, 等價於下式

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

[2]見 J. J. Gray, A commentary on Gauss's mathematical diary, 1796-1814, with an English translation, *Expositiones Mathematicae*, **2**(1984), 97–130. 重印於 *Gauss: Titan of Science* by G. W. Dunnington, Math. Asso. Amer., 2004.

他用這個公式求出了拋物線 $y = x^2$ 被 $x = 0$ 與 $x = 1$ 所截得的拋物三角形的面積爲 1/3。

4. 福爾哈伯公式: 前 n 個正整數的 p 次冪的求和

公式 (1)(2) 自然地引出一個一般問題, 即前 n 個正整數的 p 次冪的求和 (這裡 p 是一個正整數):

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p = ?$$

歷史上有許多數學家對這個問題作出了貢獻, 如埃及的海賽姆 (Ibn Al-Haytham, 11 世紀初)、德國數學家福爾哈伯 (Johann Faulhaber, 1631 年)、瑞士數學家雅各 · 伯努利 (Jacob Bernoulli, 1713 年)、日本數學家関孝和 (Takakazu Seki, 1712 年) 以及中國數學家李善蘭 (1867 年)。

最後的結果通常表達爲下述福爾哈伯公式 (或稱伯努利公式):

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}. \tag{3}$$

其中 $\binom{p+1}{j} = \dfrac{(p+1)!}{j!(p+1-j)!}$ 是組合數, 而 B_j 是著名的伯努利數, 由等式

$$B_{p+1} = -\sum_{j=1}^{p} \binom{p+1}{j} B_j, \qquad B_0 = 1 \tag{4}$$

遞迴定義。可以依次算出

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \ldots$$

作爲福爾哈伯公式的一個應用, 我們寫出前 n 個正整數的立方和:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} B_j n^{4-j} = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{5}$$

20 世紀的德國大數學家西格爾 (C. L. Siegel) 曾經說, 當第一個人發現了福爾哈伯公式的最簡單的情形時,「他必定博得了親愛的上帝的歡喜 (It pleased the dear Lord.)」

關於福爾哈伯公式, 已經有許多文獻討論, 我們不擬重複, 僅指引一部優秀的參考文獻, 即葛立恒 (Graham)、高德納 (Knuth)、帕塔許尼克 (Patashnik) 合著的《具體數學》[9]。在該書第 6 章和第 7 章給出了兩個獨立的證明, 特別值得指出的是, 第 7 章給出的母函數的證明, 曾經被當時還是中學生的蓋爾範德(I. M. Gelfand) 獨立發現[8]:

再回到數學問題, 我仍然對與面積和體積有關的問題感興趣, 我著手計算拋物線 $y=x^2$ 下方的面積, 此時需要計算

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2,$$

我毫無困難地解決了上述問題。

我進而想求出 p 次拋物線 $y=x^p$ 下方的面積, 其中 $p=3,4,5,\ldots$, 從而需要求和

$$S_p(n)=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$$

其中 p 爲任意的正整數。

與公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

類似, 我求得 $S_p(n)$ 是 n 的 $p+1$ 次多項式。事實上, 爲求得 p 次拋物線下方的面積, 只需要知道多項式 $S_p(n)$ 的最高次項的係數就足夠了, 可是我當時尚未覺察到這一點, 從而開始求整個多項式。這項研究很有意義。$\cdots\cdots$

蓋爾範德的證明我們留給有興趣的讀者去瞭解, 簡單說來, 他的方法和技巧對高中生來說也許還是太難了一點。我們以下將要介紹的, 是一種更爲初等的方法, 它是中國古代數學的一項傑出成就——高階等差數列的求和——的一個直接應用。

5. 什麼是高階等差數列?

現在我們考慮一般性的問題: 高階等差數列的求和。它將前面幾節考慮的問題作爲特例包含進來。

首先要回答的問題是: 什麼是高階 (p 階) 等差數列? 至少你會期待, $n^p, n=1,2,\ldots$ 是一個 p 階等差數列。我們將看到, 對這個問題的具體回答 (定理 1 與定理 3), 將自動引出高階等差數列求和的一個自然方法。

什麼是高階等差數列呢? 我們先給一個抽象的定義。

先看最簡單的情況, 即一階等差數列, 也就是通常所謂的等差數列的定義。根據定義, 數列 $f(n), n=1,2,\ldots$ 稱爲等差數列, 如果其前後兩項的差恒爲常數 (稱之爲公差)。通過引入所謂 (向前) 差分運算元 (這裡將 Δ 視爲作用在數列上的運算元: 一個數列 f 經過 Δ 作用就變成了一個新的數列 Δf)

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n), \qquad n=1,2,\ldots,$$

我們可以重新定義等差數列: 等差數列就是其差分 Δf 爲常數列的數列。作爲運算元, Δ 可以與自身複合 p 次, 這就得到所謂的 p 階差分運算元 Δ^p, 由此立即可得 p 階等差數列的定義:

一個數列 f 稱爲$p \geq 1$ 階等差數列, 如果其 p 階差分 $\Delta^p f$ 爲常數列而 $p-1$ 階差分 $\Delta^{p-1} f$ 不爲常數列。

根據定義立即可以驗證, n^2 是一個二階等差數列, 因爲其差分 $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ 是一個一階等差數列, 再求一次差分就得到常數列。

一般的, 我們不難驗證, 對任意給定的正整數 p, 引數爲 $n \in \mathbb{N}$ 的數列 n^p 恰好是 p 階等差數列。事實上, 所有的 p 階等差數列有一個簡單的具體刻畫 (作爲約定, 0 階等差數列就定義爲常數列; 0 次多項式就是常數)。

定理1: $f(n)$ 是一個 p 階等差數列當且僅當 $f(n)$ 是 n 的 p 次多項式。

注意到充分性是容易驗證的。必要性將作爲一個更一般的結果 (定理3) 的推論給出。

6. 朱世傑恒等式

高階等差數列的研究在中國源遠流長, 北宋博學家沈括在《夢溪筆談》第 18 卷第 301 條中首次提出了一個二階等差數列的求和公式 (沈括是用文字敘述, 這裡改用字母):

$$ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots+cd = \frac{h}{6}\Big(a(2b+d)+c(2d+b)\Big)+\frac{h}{6}(c-a), \quad (6)$$

其中 $h = c-a+1 = d-b+1$ 代表的是求和的長度 (項數)。

注意, (6) 包含 (2) 作爲特殊情況 (取 $a=b=0, c=d=n$); 此外, 另一個值得注意的特殊情形是令 $a=0, b=1, c=n, d=n+1$, 此時我們得到

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1) = \frac{n+1}{6}\Big(\big[n(2(n+1)+1)\big]+n\Big) = \frac{n+1}{3}n(n+2),$$

它等價於

$$1+3+\cdots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad (7)$$

這個特例曾由南宋的楊輝在其 1261 年出版的著作《詳解九章算法》中特別指出。

接下來的重要一步由元代的朱世傑邁出, 他注意到一個一般的 p 階等差數列的求和公式 (他在 1303 年出版的《四元玉鑒》中雖然只寫出了 $p = 2,3,4,5,6$ 的情況, 但根據他對這一方法的說明, 可以判斷他掌握了一般的情況), 鑒於其重要性, 我們把它寫成一個定理:

定理2(**朱世傑恒等式**):

(i) 設整數 $p, n \geq 0$, 則有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}. \quad (8)$$

(ii) 設整數 $n \geq p \geq 0$, 則有

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}. \tag{9}$$

歷史注記: 朱世傑真正得到的是 (8) 式, 但在組合學中提到朱世傑恒等式通常是指 (9) 。不難驗證, (8) 與 (9) 等價, 可見高德納[14]。我們不打算重複這個結果的經典證明, 僅滿足於指出, 證明 (8) 的一個關鍵引理如下:

引理1 (**楊輝恒等式**): 設 n 是正整數, $p = 1, \ldots, n$, 則有

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}. \tag{10}$$

楊輝恒等式與朱世傑恒等式在組合學中佔有重要地位。毫不奇怪, 這些結果後來也被研究過「帕斯卡三角」[3]的帕斯卡 (Pascal) 重新發現。不過, 朱世傑得到這個恒等式, 是沿沈括堆垛的思路 (所謂「垛積術」) 而來。對此, 近代數學史家章用 [19] 曾給出極好的解讀:

> 董祐誠 (1791∼1823)《割圓連比例圖解》後序曰:
>
> 近讀朱世傑《四元玉鑒》「茭草形段」、「果垛疊藏」諸問, 乃知遞乘遞除之術, 近古所有。
>
> 因斯以談, 垛積乃近古之學, 朱氏[按: 朱世傑]其開山之祖。惟朱氏言垛專指形數[按: 即英文中的 figurate numbers] $\binom{i+p-1}{i-1}$ (i, p 正整數), 即李氏 [按: 李善蘭]所謂三角 p 乘垛 ($p \geq 0$, $p = 0$ 曰元垛) 者是也。「垛積」之「積」字作「和」字解, 相當於 (求和) 運算元 $\sum_{i=1}^{n}$。形數可視爲數論函數以 p 爲變數 (按: 此處宜理解爲以 p 爲參數而以 i 爲變數), 其爲垛積, 以其適合下列函數方程式[4]:
>
> $$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+p-1}{i-1} = \binom{n+p}{n-1}$$
>
> 易言之, 垛積仍爲垛, 三角 p 乘垛積爲三角 $p+1$ 乘垛。朱氏深通其義, 可於其垛積命名之以「更落一形」相當於運算元 $\sum$ 見之。

爲使得這一解讀現代化, 我們插入近代的一個故事, 它本身也是極有趣味的。故事的主人公是普林斯頓大學數學教授、2014 年的菲爾茲獎得主巴爾加瓦 (Manjul Bhargava), 他曾回憶起兒時的一段數學經歷 [7]:

---

[3]華羅庚稱之爲「楊輝三角」, 同樣的, 我們這裡的「楊輝恒等式」的提法也是沿襲華羅庚先生, 見 [11]。

[4]容易看出, 這個等式本質上就是朱世傑恒等式 (8) 的改寫。p 乘垛中的字母 p, 當來自英文 power 的首字母。

> 我一直喜歡數學。兒時我喜歡形狀和數位。我最早的數學記憶來自於八歲時將柳丁堆成金字塔形狀 (專門用於榨汁機!) 的事。我想知道, 堆出底層每邊有 n 個柳丁的一個金字塔需要多少個柳丁? 我思考了很久, 最終確定答案是 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$。

容易看出, 巴爾加瓦童年所發現的這個公式正是沈括-楊輝公式(6), 楊輝稱之爲三角垛求和公式, 這從巴爾加瓦的敘述很容易看出理由來 (這裡的金字塔是橫截面爲正三角形的金字塔, 也就是正四面體)。

7. 朱世傑招差公式

7.1. 表述

朱世傑不僅解決了垛積數 $\binom{n}{p}$ 的對 (滿足 $n \geq p$ 的)n 的求和, 而且解決了一般的 p 階等差數列 $f(n)$ 的求和。朱世傑發現的下述結果, 體現了組合數 $\binom{n}{k}(k=0,1,\ldots,p)$ 在所有 p 階等差數列的中的特殊地位 (用線性代數的語言, 相當於說, 它們構成一組基)。[5]

定理 3 (**朱世傑招差公式**): 設 $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 p 階等差數列, 其中 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ 是自然數集, 則 f 可以寫成 $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{k},\ldots,\binom{n}{p}$ 的線性組合:

$$f(n)=\sum_{k=0}^{p}\Delta^k f(0)\cdot\binom{n}{k}, \tag{11}$$

其中各個係數 $\Delta^k f(0)$ 恰好是 f 的各階差分 $\Delta^0 f=f,\Delta f,\ldots,\Delta^p f$ 在 $n=0$ 的取值, 事實上我們有

$$\Delta^k f(0)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(i). \tag{12}$$

由此可以立即推出定理1的必要性部分, 因爲各個組合數

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

顯然都是 n 的 k 次多項式。事實上它還可以推出關於整數值多項式 (Integer-valued polynomial) 的基本結果。一個複係數多項式 $f(x)$ 稱爲整數值多項式, 如果滿足 $f(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$, 其中 $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ 是整數集。關於整數值多項式的基本結果如下, 它主要說整數值多項式可以用差分多項式的線性組合來簡單刻畫。

定理 4: 設 $f(x)$ 是一個複係數 p 次多項式, 則以下三條等價:

[5] 朱世傑雖然只陳述了 $p=4$ 的情況, 但根據他對公式的文字陳述, 完全可以認爲, 他掌握了一般的結果。定理3後來被牛頓 (Newton) 重新發現, 並出現在其 1687 年出版的名著《自然哲學之數學原理》中, 因此西方通常稱之爲牛頓插值公式。也許更恰當的稱謂是朱世傑-牛頓差分公式。

(i) $f(x)$ 是一個整數值多項式。

(ii) $f(x)$ 對連續 $p+1$ 個整數取整數值;

(iii) $f(x)$ 可以寫成 $1=\binom{x}{0},\binom{x}{1},\ldots,\binom{x}{p}$ 的整係數線性組合[6]。

證明留給有興趣的讀者。

歷史注記: 事實上, 朱世傑得到了下述一般招差公式: 設 $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 爲 p 階等差數列, $n_0\in\mathbb{N}$, 這裡 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ 是自然數集, 則有

$$f(n)=\sum_{k=0}^{p}\Delta^k f(n_0)\cdot\binom{n-n_0}{k}. \tag{13}$$

當 $n_0=0$ 時, 我們就得到了朱世傑招差公式 (11)。

7.2. 證明

定理 3 的一個古典的演算法證明可見陳景潤《組合數學》[5], 那裡給出一個稱作「差分表」的方法來確定各階差分。這裡我們給出一個現代的抽象證明。

一個基本的觀察是, 在形式上, 朱世傑招差公式 (定理3) 讓我們想起牛頓的二項式展開。事實上, 正如我們立即就要指出的, 定理3不過是運算元水準上的二項式展開。爲此, 只要我們引入右平移運算元 $T: f\mapsto Tf$, 其中 $Tf(n)=f(n+1)$。立即看出 $T=\Delta+I$, 其中 I 是恒等運算元, 於是對任意的正整數 m, 有下述運算元水準上的二項式展開

$$T^m=(\Delta+I)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cdot\Delta^k$$

將等式兩邊作用於 f 並在 $n=0$ 取值 (注意到 $T^mf(0)=f(m)$) 就有

$$f(m)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cdot\Delta^k f(0)$$

現若 f 是 p 階等差數列, 則當 $k>p$ 時, 有 $\Delta^k f=0$, 從而上式右邊至多有 $p+1$ 項, 即:

$$f(m)=\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\cdot\Delta^k f(0)$$

將 m 換爲 n, 並將各係數 $\Delta^k f(0)$ 前置, 我們就得到朱世傑的招差公式 (11)。

---

[6]其中差分多項式 $\binom{x}{k}$ 定義爲:

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

於是現在對任意的實數 x, $\binom{x}{k}$ 都有意義。

(12) 的證明類似而且更簡單, 我們留給有興趣的讀者 (可參見《具體數學》[9] 第 5.3 節)。

7.3. 示例

原則上, 爲了求出以上 $p+1$ 個差分, 只需要知道 f 在 $p+1$ 個點 $0,1,\ldots,p$ 的函數值 $f(0),f(1),\ldots,f(p)$ 即可, 接下來的只需依次招差 (即求差分)。現在我們就來示範一下如何招差。

例1: 先看二次多項式 $f(n)=n^2$。根據朱世傑招差公式,

$$f(n)=\Delta^2 f(0)\cdot\binom{n}{2}+\Delta f(0)\cdot\binom{n}{1}+f(0)$$

我們只要求出三個係數 $\Delta^2 f(0),\Delta f(0),f(0)$。當然我們可以用公式 (10) 計算, 但那個計算太笨了, 我們寧可選擇一種更貼近定義的計算方式 (以便你熟悉高階差分)。顯然, 最容易的是 $f(0)=0^2=0$, 次容易的是

$$\Delta f(0)=f(1)-f(0)=1^2-0^2=1-0=1.$$

爲求出 $\Delta^2 f(0)$, 我們需要先求出 $\Delta f(1)=f(2)-f(1)=2^2-1^2=4-1=3$, 從而

$$\Delta^2 f(0)=\Delta f(1)-\Delta f(0)=3-1=2.$$

於是我們得到

$$f(n)=\Delta^2 f(0)\cdot\binom{n}{2}+\Delta f(0)\cdot\binom{n}{1}+f(0)=2\cdot\binom{n}{2}+\binom{n}{1}$$

即

$$n^2=2\frac{n(n-1)}{2}+n. \tag{14}$$

例2: 對 $f(n)=n^4$ 招差。這裡我們把差分表寫成一個易於排版的格式 (最終公式中需要的資料分佈在第一列, 加粗示意):

n	=	0	1	2	3	4
$f(n)$	=	**0**	1	16	81	256
$\Delta f(n)$	=	**1**	15	65	175	*
$\Delta^2 f(n)$	=	**14**	50	110	*	*
$\Delta^3 f(n)$	=	**36**	60	*	*	*
$\Delta^4 f(n)$	=	**24**	*	*	*	*

於是根據朱世傑招差公式, 即可得到

$$n^4=\sum_{k=0}^{4}\Delta^k f(0)\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{1}+14\binom{n}{2}+36\binom{n}{3}+24\binom{n}{4} \tag{15}$$

(當 $k>n$ 時約定 $\binom{n}{k}=0$。) 出於立即就會明白的理由, 這裡我們不再對右邊的運算式化簡了 (事實上按照我們的觀點, 這就是最自然的表達了)。

8. 高階等差數列的求和: 招差垛積術

8.1. 示例

有了定理 3 和定理 2, 高階等差數列的求和就變成了一個平凡的問題。由於定理 3 體現的是招差術, 定理 2 體現的是垛積術, 所以聯合運用這兩個定理對高階等差數列求和的方法就稱之為「招差垛積術」。

作為兩個現成的例子, 我們繼續考慮前面的例 1 和例 2。

例1 (**續**): 前 n 個正整數的平方的求和。

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\\
&=(2\cdot 0+1)+(2\cdot 1+2)+(2\cdot 3+4)+\cdots+(2\frac{n(n-1)}{2}+n) \qquad (\text{根據}(14))\\
&=2\cdot(1+3+6+\cdots\frac{n(n-1)}{2})+(1+2+3+\cdots+n) \qquad (\text{求和的線性性質})\\
&=2\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2} \qquad (\text{根據}(7)\text{ 與 }(1))\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

這就是阿基米德的公式(2)。

例2 (**續**): 前 n 個正整數的 4 次方的求和。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^4&=\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{k}{1}+14\binom{k}{2}+36\binom{k}{3}+24\binom{k}{4}\right) \qquad (\text{根據}(15))\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}+14\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+36\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3}+24\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{4} \qquad (\text{求和的線性性質})\\
&=\binom{n+1}{2}+14\binom{n+1}{3}+36\binom{n+1}{4}+24\binom{n+1}{5} \qquad (\text{根據 }(9)\ )
\end{aligned}$$

8.2. 本質

其實這方法 (招差垛積術) 就是俗稱的「裂項求和法」。招差即裂項, 其本質就在於將通項 $f(n)$ 寫爲一個新的數列 (「原數列」)$F(n)$ 的差分, 垛積即求和, 將保證中間項抵消, 然後只剩首尾相減的兩項。

我們以朱世傑的求和等式 (9) 來說明這一點。注意到楊輝恒等式本質上等價於 (一個一般的結果見§9.4下述基本的差分關係式:

$$\Delta\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p} - \binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} \tag{16}$$

也就是說求和等式 (9) 中的通項

$$\binom{n}{p} = \Delta\binom{n}{p+1} == \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1}$$

可以裂項, 自然求和就成平凡的了。

利用求和的線性性質, 用招差垛積術可以解決任意的高階等差數列的求和; 特別的, 可以對任意的正整數 p, 求出 n^p 的前 n 項之和。有點奇怪的是, 原本元代的朱世傑來做這個工作是極順手的, 可實際上, 他沒有做, 而把這個原本只是舉手之勞的問題留給了淸代的李善蘭。我們將在後面介紹李善蘭的這一工作。在此之前, 我們先停下來從另一個角度觀察一下這個巧妙的求和辦法。

8.3. 與 Newton-Leibniz 公式的類比

招差垛積的本質, 就在於將通項 $f(n)$ 寫爲一個新的數列 (「原數列」, 即「招差」)$F(n)$ 的差分, 這樣的話, 求和將保證中間項抵消, 然後只剩首尾相減的兩項。

這個方法可以濃縮成一個簡單的公式

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_1} \Delta F(n) = F(n_1+1) - F(n_0). \tag{17}$$

這也許會讓你想起微積分的基本定理, 即 Newton-Leibniz 公式, 我們把它寫成下述形式

$$\int_{x=x_0}^{x=x_1} \mathrm{d}F(x) = F(x_1) - F(x_0). \tag{18}$$

這兩個公式非常相似: 數列 $F(n)$ (變數 n 取值於離散的自然數集) 對應於函數 $F(x)$ (變數 x 取值於實數連續統), 求和對應於求定積分。在微積分的情況, 爲了求出一個函數 $f(x)$ 在某區間上的定積分, 我們先求出它的一個「原函數」$F(x)$, 於是可以根據 Newton-Leibniz 公式得到, 在某個區間上的定積分的值, 恰好就是在該區間的兩個端點的函數值之差。可以期待,

如果我們以這種方式來介紹微積分的基本定理, 必定有助於學生把握微積分、特別是 Newton-Leibniz 公式的精髓。

隨著貌合神似的 (17) 與 (18) 的一同出現, 離散與連續之類比的冰山一角也浮出水面, 下一節我們將稍作展開。

9. 有限差和分 VS 無限微積分

關於有限差和分與無限微積分之間的離散-連續類比, 數學家很早就注意到了, 如微積分的另一個創始人萊布尼茨 (Leibniz)。萊布尼茨發明並沿用至今的積分記號 $\int$ 像一個拉長了的 s, 就是在提醒讀者, 積分是離散的求和 (因爲「求和」的英文是 summation, 所以其記號一般用 S 所對應的希臘字母 Σ) 的連續類比。同樣的, 差分運算 (它對應著「差分」英文 difference 的首字母 d) 可以視爲求導 D 這個無限運算的有限類比。因此, 你可以粗略地說: 積分就是極限版本的求和、求導就是極限版本的作差。在這個類比下, 微積分中的許多結果可以在差和分理論中得到簡化而不失本質的理解。以下我們舉幾個例子說明。

9.1. 舉例1: 高階等差數列 VS 多項式函數

作爲這個顯著類比的第一個例子我們首先指出, 定理 1 的連續 (無限) 版本:

定理 $1'$: 如果定義在某開區間上的函數 f 具有直到 $p+1 \geq 1$ 階的導數, 則 $f^{(p+1)}(x)$ 恒等於零且 $f^{(p)}(x)$ 不恒等於零當且僅當 $f(x)$ 是一個 p 次多項式。

注: 在 $p=0$ 的特殊情況, 上述結果是熟知的: 開區間上的可導函數 $f(x)$ 爲常函數當且僅當 $f'(x)$ 恒等於零。

9.2. 舉例2: 朱世傑恒等式 VS 費爾馬積分公式

爲給出朱世傑恒等式 (9) 的一個連續版本, 我們先來看與之等價的楊輝恒等式 (10) ; 不難看出其連續 (微分) 版本, 就是我們所熟悉的求導公式:

引理 $1'$: 設 p 是一個正整數, 則對一切 $x>0$ 有:

$$D\left(\frac{x^p}{p!}\right) = \left(\frac{x^p}{p!}\right)' = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}. \tag{19}$$

我們通常把它寫成 $(x^p)' = px^{p-1}$, 並且我們知道這個等式對一切實數 $p>0$ 都成立。現在我們可以看出這個微分等式所對應的積分等式了, 這就是我們所熟悉的冪函數 x^p 的積分公式:

定理 $2'$: 設 p 是一個正整數, 則對一切 $a > 0$ 有:

$$\int_0^a x^p \mathrm{d}x = \frac{a^{p+1}}{p+1}. \tag{20}$$

這就是朱世傑恒等式的連續版本, 爲讓你看得更清楚, 我們進一步可以寫成

$$\int_0^a \frac{x^p}{p!} \mathrm{d}x = \frac{a^{p+1}}{(p+1)!}. \tag{21}$$

歷史注記: 根據布爾巴基 (Bourbaki) 在其《實變函數之初等理論》[1] 中給出的歷史注記, 是費爾馬 (Fermat, 不遲於 1636 年) 首先證明了定理 $2'$, 並且他證明上述結果對一切不等於 -1 的有理數 p 都成立。當然, 在最簡單的特殊情形 ($p = 2$), 可以追溯到阿基米德。與費爾馬同時代的卡瓦列裡 (Cavalieri) 利用其著名的卡瓦列裡原理也作出了貢獻。跟 n^p 的求和問題一樣, x^p 的定積分計算又是另一個長長的故事了, 甚至引出牛頓對微積分的創立, 受篇幅與主題所限, 我們就此打住。

9.3. 舉例3: 朱世傑招差公式 VS 泰勒定理

如果你學過微積分, 定理 3 中的朱世傑招差公式 (11)也許會讓你想起函數 $f(x)$ 的泰勒展開[7], 即下述

定理 $3'$: 設函數 $f(x)$ 在 $[0, a)$ 有直到 $n+1$ 階的連續導數, 則對任意的 $x \in (0, a)$ 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{22}$$

其中 $0 < \xi < x$ ($\xi = \xi(x)$ 一般依賴於 x)。

事實上, 牛頓差分公式本質上就是泰勒定理的離散版本, 而且泰勒當初推導這個定理就是對牛頓差分公式取極限得到的。德國數學家、數學教育家克萊因 (F. Klein) 在其名著《高觀點下的初等數學》中曾特別強調這一類比的教學意義 (見[13, pp.267-268]):

> 我提醒你們注意, 在牛頓差分公式和泰勒公式之間的顯著類似。這種類似有一個基本原因: 從牛頓公式容易推出泰勒定理, 這相應於差分多項式取極限以後就變爲密切多項式。$\cdots\cdots$ 依我之見, 這種證明方法是泰勒定理最好的證法, 它使泰勒定理與一些十分簡單的問題廣泛聯繫起來, 並提供了一個過渡到極限的自然途徑。然而, 熟知這些事實的數學家並不這麼想 (值得注意的是, 許多人甚至包括許多教科書的作

[7] 下述泰勒 (Brook Taylor) 定理通常不合理地稱之爲「麥克勞林定理」, 麥克勞林 (Colin Maclaurin) 晚於泰勒而得到這一特殊結果。按照通常的表述, 泰勒定理 (以任意一點 $x = x_0$ 爲基點展開) 對應於一般的朱世傑招差公式 (15)。順便提一句, 泰勒是牛頓的學生, 而牛頓之前已經得到了這一結果。

者, 卻不懂得上述道理)。他們習慣板起面孔對待過渡到極限的問題, 寧願直接證明泰勒定理, 而忽略它與有限差分計算的聯繫。

然而, 作爲歷史事實, 我必須強調, 泰勒定理確實是源於有限差分計算的……

9.4. 舉例4: 差和分的基本定理 VS 微積分的基本定理

在 §8.3 我們已經見識到「垛積招差術」的基本原理與 Newton-Leibniz 定理的類似。通常 Newton-Leibniz 定理是作爲微積分基本定理的一部分來敘述的, 現在我們補充上它的另一部分 (見[9])。

定理5 (**微積分基本定理**): 設 f, F 是兩個函數, 則

$$f = DF \iff \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

這裡 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 是 f 的不定積分, 即導數等於 $f(x)$ 的所有函數的集合。

不難看出, 與之對應的離散版本如下:

定理 $5'$ (**差和分基本定理**): 設 f, F 是兩個數列, 則

$$f = \Delta F \iff \sum f(n)\delta n = F(n) + C,$$

這裡 $\sum f(n)\delta n$ 是 $f(n)$ 的不定和分, 即差分等於 $f(n)$ 所有數列的集合。

10. 前 n 個正整數的 p 次冪的李善蘭求和公式

吳文俊先生 [18] 曾指出:「有著悠久發展歷史的招差術, 主要見於歷代的曆法之中, 在元代曆法中則實際上已接近於微積分中的麥克勞林級數。」這裡吳文俊所指的, 就是一般的朱世傑招差公式 (13)。

遺憾的是, 中國沒有產生連續的微積分。朱世傑的招差術是微分的離散形式, 垛積術是積分的離散形式, 兩者合在一起可視爲離散的微積分, 它與連續的微積分只有一步 (取極限) 之遙, 甚至這一步你可以稱之爲「無窮小」的一步。應該指出, 在李善蘭之前, 中國古代並沒有產生嚴格的極限概念 (大致可以這麼理解, 極限是一個理想的理論概念, 而中國古代數學強調演算法與應用, 因此極限的概念不在關注範圍內)。

離散微積分的骨架在元代朱世傑手裡已經基本形成, 不過他似乎沒有充分認識到這一成果的重要意義。其理由大致這樣理解, 朱世傑的《四元玉鑒》其主旨是闡述其開創的「四元術」, 因而對招差垛積術沒有足夠強調。四元即四個未知數, 朱世傑稱之爲「天、地、人、物」。「四元術」

就是系統地求解四個未知數的方程組的方法, 它是李冶「天元術」(解一個未知數「天元」的方程的方法) 的推廣。未知數限定爲「四」, 在數學上沒並有什麼道理 (也許只是因爲書寫時比較方便, 正如通常的古錢幣如「開元通寶」的四個字恰好占了四個方位), 因而「四元術」可以推廣到任意多個未知數。在 20 世紀電腦科學興起的背景下, 朱世傑的這一工作最終啟發吳文俊開創了數學機械化的「吳方法」。吳文俊甚至這樣說「這裡所謂本人所創立的方法, 事實上無非是朱世傑四元術的現代化推廣形式。」

自朱世傑以後, 中國古代數學盛極而衰,「四元術」成了一門絕學。明代雖然也有人研究「垛積術」, 但少有突破, 直到清代, 陳世仁、汪萊、董祐誠等才在朱世傑的基礎上發展, 而李善蘭則集其大成, 其成果匯於四卷本《垛積比類》(1867 年出版) 中。對李善蘭工作的介紹, 可見[17]。

李善蘭的一項重要成就, 是用招差垛積術求出了 k^n 的前 k 項和, 他的結果表述如下[8]。李善蘭首先得出了 $x^n (n \geq 1)$ 的招差公式:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{x+k}{n} \tag{23}$$

其中招差係數 $\left\langle {n \atop k} \right\rangle (0 \leq k \leq n)$ 按照下述遞迴公式給出

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1) \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k) \left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle, \qquad (n > 0) \tag{24}$$

並約定 $\left\langle {0 \atop 0} \right\rangle = 1$, 且當 $k < 0$ 時有 $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = 0$。

從而

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^p &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p} \left\langle {p \atop k} \right\rangle \binom{i+k}{p} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \left(\left\langle {p \atop k} \right\rangle \sum_{i=1}^{n} \binom{i+k}{p} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \left\langle {p \atop k} \right\rangle \binom{n+k+1}{p+1} \end{aligned}$$

這樣就給出了 n^p 的前 n 項和公式, 其中不涉及 Bernoulli 數, 不過用到了數 $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, 這個數在西方一般被稱爲歐拉數 (Eulerian Numbers), 而章用在李善蘭的工作中發現了這個數, 因此命名爲李善蘭數。羅見今[15]曾指出, 日本數學家可能比李善蘭更早發現了這個數。關於這個數的基本性質, 可見高德納等著《具體數學》第 6.2 節。

---

[8] 奇怪的是, 李善蘭並沒有用朱世傑招差公式。如果應用朱世傑招差公式, 得到的結果可見陳景潤[5]。

11. 插話: 作為極客的李善蘭

在電腦界和數學界, 高德納 (Donald Knuth) 的名字如雷貫耳。他是美國電腦科學家、數學家, 1974 年圖靈獎獲得者、電腦演算法和程式設計藝術的大師, 著有程式設計聖經《電腦程式設計藝術》(*The Art of Computer Programming*)。

高德納對李善蘭非常推崇, 在 2014 年的一個訪談裡 [14], 當問及倘若他出生在 200 年前會選擇何種職業時, 他回答說願與李善蘭 (下述引文中筆者特地加粗) 等數學家一同做 19 世紀的「極客」:

> **問**: 如果您出生在 200 年前, 您會從事哪一種職業呢?
>
> **答**: 這是一個多麼令人著迷的問題, 以前還從沒有人問過我呢!
>
> 如果我出生在 1814 年, 我受到的教育肯定非常有限, 而且幾乎沒有辦法接觸到知識。我的祖輩都是勞動者, 在不屬於自己的農場裡幹活, 居住於現在稱之爲德國北部的地方。但我想, 你心裡其實想問: 如果我是當時少數可以受到很好教育的人之一, 而且可以自由選擇職業的話, 我會怎麼辦。
>
> 我一直想成爲一名教師。事實上, 我上一年級時, 就想教一年級; 上二年級時, 我想教二年級; 等等。我最終成爲了一名大學教師。因此我想, 如果可能的話, 我會是一名教師。
>
> 繼續這種推測, 我要解釋的是極客。[9] 弗雷德 · 格林貝格爾 (Fred Gruenberger) 很久以前告訴我, 照他的經驗, 大約 2% 的大學生對電腦著迷。這就像他和我曾經經歷的一樣。這個數字一直在我的腦海裡, 多年來我多次確認了他的這個觀察經驗。例如我瞭解到, 1977 年伊利諾大學有 1.1 萬名學生, 其中 220 人學計算機科學!
>
> 因此我相信, 世界人口的一小部分已經獲取了一種特殊的思維方式, 我碰巧也在其中。這些人在電腦科學領域有了自己的學科名字後, 碰巧發現了彼此的存在。
>
> 爲簡單起見, 讓我稱像我這樣的人爲「極客」, 他們約占世界人口的 2%。我不知道如何解釋計算機科學爲何得以迅速崛起——從 1965 年開始到 1975 年, 在 10 年時間裡, 幾乎所有的學院和大學從無到有, 都設立了電腦系。但我知道, 這些電腦系爲電腦極客們提供了一個可以一起工作的「家」。同樣, 我也不知道有什麼可以更好地解釋這麼多年來我所見證的很多軟體專案最後失敗的原因, 除了一個假設, 那就是這些項目並沒有交給眞正的電腦極客。
>
> 那麼, 19 世紀早期的極客都有誰呢? 我認爲, 出生在 1814 年之前的極客 (雖然他們一般被認爲是數學家), 有阿貝爾 (Abel, 1802 年), 雅可比 (Jacobi, 1804 年)、漢米爾頓 (Hamilton, 1805 年)、柯克曼 (Kirkman, 1806 年)、德 · 摩根 (De

[9] 美國俚語「geek」的音譯。隨著互聯網文化的興起, 這個詞含有智力超群和努力的語意, 又被用於形容對電腦和網路技術有狂熱興趣並投入大量時間鑽研的人。

Morgan, 1806 年)、劉維爾 (Liouville, 1809 年)、庫默爾 (Kummer, 1810 年) 和中國的李善蘭 (Li Shanlan, 1811 年)。出生在 1814 年之後的極客, 有卡特蘭 (Catalan, 1814 年)、西爾維斯特 (Sylvester, 1814 年)、布林 (Boole, 1815 年)、維爾斯特拉斯 (Weierstrass, 1815 年) 和博爾夏特 (Borchardt, 1817 年)。這些數學家的著作令我著迷。我樂意與這些人爲伍, 如果幸運的話, 我也許做著與他們類似的事。

12. 思考題

朱世傑的成就曾經被金庸寫進武俠小說。在《射雕英雄傳》第 29 回「黑沼隱女」中, 金庸描寫了一個執著於算學的奇怪女俠瑛姑 (一燈大師的愛妃、周伯通的心上人)。與其稱號「神算子」名不副實, 瑛姑的數學水準實在讓人大跌眼鏡。一個簡單的九宮格, 她竟想了十幾年都沒有想出來? (很明顯, 她不應該鑽研數學!) 相比而言, 黃蓉的數學就要高明得多。在小說中, 黃蓉臨走時給瑛姑出了三道難題:

> 黃蓉氣極, 正欲反唇相譏, 一轉念間, 扶著郭靖站起身來, 用竹棒在地下沙地上寫了三道算題:
> 第一道是包括日、月、水、火、木、金、土、羅、計都的「七曜九執天竺筆算」;
> 第二道是「立方招兵支銀給米題」;
> 第三道是「鬼穀算題」:「今有物不知其數, 三三數之剩二, 五五數之剩三, 七七數之剩二, 問物幾何?」

第三道題涉及數論中著名的中國剩餘定理, 關於它的一個優美介紹可見蔡老師的文章 [4]。而第二道題「立方招兵支銀給米題」就與高階等差數列的求和有關, 原題出自朱世傑《四元玉鑒》(以下給出最簡單的版本, 只涉及「招兵」而不論「支銀給米」):

> 今有官司依立方招兵, 初招方面三尺, 次招方面轉多一尺。已招二萬三千四百人。問來幾日?

翻譯成白話文如下 (參考了郭書春老師的翻譯, 見 [21] 第 454 頁):

> 今有官府要按立方數招兵, 第一日招兵 3^3 人, 次日招兵 4^3 人, 如此等等。已招兵 23400 人。問: 一共招兵多少天?

留給有興趣的讀者思考 (提示, 一個簡單的解法可以用(5))。

13. 小結

高階等差數列的求和, 實質上是中國古代數學的一項傑出成就。[10] 其主要工具是關於組合數的朱世傑公式, 以及朱世傑招差公式。它們都可以視爲微積分所熟知的兩個結果的離散版本, 因此如果在上真正的微積分之前, 給學生講一講這個課題, 對學生通過類比——差分與求和, 分別作爲微分與積分的離散類比——掌握微積分是極有益處的。在此, 我們要向各位讀者特別提及鐘開萊教授[20]的一個建議:

> 1936年, 我就讀於北京清華大學時, 哈代 (G. H. Hardy) 所著《純數學教程》(*A Course of Pure Mathematics*) 是一年級微積分參考書之一, 正是此書使我開始從物理學轉向數學, 至今我不忘哈代所指出的: 教授微積分應從離散變數 n 的函數而不是從連續變數 x 的函數開始。(諸君也在課堂上試一試看!)

在離散-連續類比這個主題的背後, 藏著一個隱形的字典, 一邊離散, 一邊連續, 形成對應。我們建議那些學過微積分的讀者去儘量填充這個字典, 這會讓你對微積分有更本質的理解。特別地, 我們要向讀者推薦蔡聰明老師富有啟發性的文章 [2, 3]。

致謝: 感謝內蒙古工業大學崔繼峰教授和審稿老師對作者就初稿提出了許多有價值的建議。

参考文獻

1. N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: Functions of one Real Variable, Elementary Theory*, Translated by Philip Spain. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
2. 蔡聰明。微積分與差和分大意——連續與離散之間的類推。數學傳播, 2(2), 34-39, 1977。
3. 蔡聰明。Leibniz 如何想出微積分? 數學傳播, 18(3), 1-14, 1992。
4. 蔡聰明。談韓信點兵問題。科學月刊, 29(9), 1998。電子版可見數學知識網頁: http://episte.math.ntu.edu.tw/
5. 陳景潤。組合數學。哈爾濱工業大學出版社, 2012 年。
6. 程貞一。我的人生經歷與學術生涯——程貞一教授訪談錄, 郭金海。自然科學史研究, 34(3), 370-395, 2015。
7. M. Cook, Mathematicians: An outer view of the inner world, Princeton University Press, 2009. 中譯本《當代大數學家畫傳》, 林開亮等譯, 上海世紀出版集團, 2015 年。
8. V. S. Retakh and A. B. Sosinsky, A talk with I. M. Gelfand: A student and teacher followed his own interests and instincts, 發表於 *Quantum*, (Jan-Feb 1989), 電子版見 http://israelmgelfand.com/talks/quantum_interview.pdf. 有中譯文, 數學譯林, 第 4 期, 李錕譯, 340-347, 1990.
9. Ronald Graham, Donald Knuth, and Oren Patashnik, *Concrete Mathematics* (Second ed.). Reading, MA: Addison-Wesley Professional. 1994. 中譯本《具體數學》, 張明堯、張凡譯, 人民郵電出版社, 2013。

[10]華羅庚先生一定非常引以爲傲, 他在 1956 年第一次對中學生做科普講座, 就是圍繞這一主題, 見 [10][11]。

10. 華羅庚。高階等差級數。數學通報, 年第 8 期, 1-2, 1956。
11. 華羅庚。從楊輝三角談起。科學出版社, 1956年, 2002 年列入 “數學小叢書”重印。
12. 黃祖賓。走進吳文俊院士, 黃祖賓問, 吳文俊答。廣西民族學院學報, 第 4 期, 2-5, 2004。
13. F. Klein, 高觀點下的初等數學 (第一卷): 算術、代數、分析, 舒湘芹、陳義章、楊欽樑譯, 臺北, 九章出版社, 1996; 上海, 復旦大學出版社, 2008。
14. D. E. Knuth, Twenty Questions for Donald Knuth, http://www.informit.com/articles/article.aspx?p=2213858. 中譯文, 問高德納的二十個問題, 周明譯, 中國電腦學會通訊, 10(8), 64-73, 2014。
15. 羅見今。自然數冪和公式的發展。高等數學研究, 第 4 期, 56-61, 2004。
16. 錢寶琮。中國數學史。科學出版社, 1964 年。
17. 王渝生。李善蘭的垛積術研究及翻譯工作。收入“數學與人文”叢書第十八輯《數學的應用》, 丘成桐等主編, 高等教育出版社, 2015。
18. 吳文俊。《數學與科學史叢書》總序。西北大學學報 (自然科學版), 第2期, 344, 2006。
19. 章用。垛積比類疏證。科學, 23(11), 647-663, 1939。
20. 鐘開萊。數學與應用, 施穀譯。自然雜誌, 11(9), 643-646, 1988。
21. 朱世傑。四元玉鑒。郭書春譯, 遼寧教育出版社, 2006。

—本文作者任教中國大陸西北農林科技大學理學院—

2016 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

三心定理 文 / 黃于庭

若三角形能比喻人生
我會在「外心」建一座白色燈塔
讓光抹去蒼穹的灰 撫去海面的濛
照亮你旅途所到之處

若三角形能比喻夢想
我將在「內心」畫一個圓
沿著圓築一個園 撐起你夢想的藍圖
當你感到疲憊時 請來園裡休憩
讓園成爲支持你的後盾

若三角形能比喻生活
密密麻麻的生活課題
學習協調家庭、工作、人際三方
試著在三者間取得最佳平衡點
而孩子
你正是那個點
你正是我生活的「重心」

—本文作者就讀健行科技大學企業管理系—